Title	Duflo-Zelobenko 4-term exact sequence and homomorphisms between principal series (New Viewpoints of Representation Theory and Noncommutative Harmonic Analysis)
Author(s)	阿部, 紀行
Citation	数理解析研究所講究録別冊 = RIMS Kokyuroku Bessatsu (2010), B20: 31-38
Issue Date	2010-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/177017
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B20 (2010), 31–38

Duflo-Zelobenko 4-term exact sequence and homomorphisms between principal series

東京大学大学院・数理科学研究科　阿部 紀行 (Noriyuki Abe)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

概要

We give the precise conditions for nonzero homomorphisms to exists between twisted Verma modules. The proof is based on the Duflo-Zelobenko 4-term exact sequence.

§1　はじめに

表現論の主題は，その名の通り群（またはより一般的な代数系）の表現を調べることである．特に既約表現が重要な対象であり，まずはその分類が目標の一つとなる．多くの場合は，まず標準表現とでも呼ぶべき表現が定義され，既約表現はそれを用いて構成，分類される．標準表現はその構成が難しくないことが多く，表現自体を直接に調べることが可能であることが多い．しかし，標準表現から既約表現を構成する方法が抽象的であることが多く，そこから既約表現の構造を読み取ることができるわけではない．従って，次の研究の段階は標準表現と既約表現の関係を調べることになる．もし考えている表現が完全可約であったならば，既約表現の標準表現における重複度を調べることで，標準表現を既約表現を用いて理解することができる．完全可約でない場合でも，既約表現の重複度は重要な不変量である．しかし，この場合は既約表現同士の拡大がどのようになっているかを調べる必要もある．

本論の主役である半単純 Lie 群の場合は，放物型誘導表現が標準表現の役割を果たす．適当なパラメータを持つ放物型誘導表現は唯一の既約商（Langlands 商）を持ち，それにより既約表現が分類される（Langlands 分類）．また，このような放物型誘導表現におけ

Received December 20, 2008. Accepted July 7, 2009.
abenori@ms.u-tokyo.ac.jp
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 22E47, Secondary 17B10

る既約表現の重複度を決定するアルゴリズムも知られている（Kazdhan-Lusztig 予想）．しかし，その中における既約表現同士の拡大を記述することは今のところ非常に難しい問題である．

本論は，そのような構造を知るための試みとして，放物型誘導表現，特に主系列表現同士の間の準同型の決定について論じる．このような準同型は加群自体の構造と深く関わっており，何らかの情報を得られると期待できる．特に，[Abe] で得られた複素半単純 Lie 群の場合の主系列表現の間の準同型の存在条件を概説する．

Notation

次の記号は断り無く用いる．G を連結，単連結な複素半単純 Lie 群とし，B をその Borel 部分群，$B = MAN$ を Langlands 分解とする．従って，$H = MA$ とおけばこれは G の Cartan 部分群である．群に対応する Lie 環は対応するドイツ文字で表す．例えば，G の Lie 環は $\mathfrak{g}$ であり，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数を与える．Δ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に関する root 系とし，Δ^+ を N により定まる positive system，$\Delta^- = -\Delta^+$，W を Δ の Weyl 群とする．W は G を実半単純 Lie 群とみた時の小 Weyl 群と一致し，更に $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の Weyl 群は $W \times W$ と同型になる．ここで実ベクトル空間 V に対し，$V_\mathbb{C} = V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ とおいた．また，V が複素ベクトル空間の時，$V^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V, \mathbb{C})$ とおく．

§2　例：$SL(2,\mathbb{C})$ の場合

$G = SL(2,\mathbb{C})$ の場合に準同型を調べてみることにしよう．MA は可換であるから，微分によってその既約表現は $\mathfrak{m}_\mathbb{C}^* \oplus \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ の元を与える．同型 $\mathfrak{m} \simeq \mathbb{R}$ と $\mathfrak{a} \simeq \mathbb{R}$ を，$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の root が $\{(2,2),(2,-2),(-2,2),(-2,-2)\} \subset \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \simeq \mathfrak{m}_\mathbb{C}^* \oplus \mathfrak{a}_\mathbb{C}^* = \mathfrak{h}_\mathbb{C}^*$ となるようにとる．このとき，$(\sigma, \nu) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \simeq \mathfrak{m}_\mathbb{C}^* \oplus \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ が MA の表現の微分であるための必要十分条件は $\sigma \in \mathbb{Z}$ である．また，$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の Weyl 群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型で，その作用は次のようになる．（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$ とする．）

$$\begin{aligned}(1,0)(\sigma,\nu) &= (\nu,\sigma),\\ (0,1)(\sigma,\nu) &= (-\nu,-\sigma).\end{aligned}$$

最も複雑な場合は，(σ,ν) が整かつ正則な場合，つまり $\sigma - \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，$2\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ の場合である．Weyl 群の作用により，$2\nu \in \mathbb{Z}_{>0}$，$|\sigma| < \nu$ としてよい．このとき，(ν,σ)，$(-\nu,-\sigma)$ に対応する表現は同型で，既約となる．この表現は (σ,ν) に対応する表現の部分表現となり，それによる (σ,ν) の商は有限次元既約表現である．また，(σ,ν) に対応

する表現と $(-\sigma,-\nu)$ に対応する表現は互いに双対の関係にある．つまり，以下のようになる．

$$(\sigma,\nu)=\begin{array}{|c|}\hline \text{有限次元表現}\\ \hline (\nu,\sigma)\\ \hline\end{array},\quad (\nu,\sigma)\simeq(-\nu,-\sigma),\quad (-\sigma,-\nu)=\begin{array}{|c|}\hline (\nu,\sigma)\\ \hline \text{有限次元表現}\\ \hline\end{array}.$$

従って，準同型の次元を表にすると以下のようになる．

		定義域			
		(σ,ν)	(ν,σ)	$(-\nu,-\sigma)$	$(-\sigma,-\nu)$
値域	(σ,ν)	1	1	1	1
	(ν,σ)	0	1	1	1
	$(-\nu,-\sigma)$	0	1	1	1
	$(-\sigma,-\nu)$	1	0	0	1

注意 2.1　この場合次元は全て 1 以下であるが，これは $SL(2,\mathbb{C})$ の特殊事情であり，一般には 2 次元以上になることもありうる [Str03].

§3　複素 Lie 群の主系列表現

$\rho=(1/2)\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$ とおく．これは H の表現を与えるが，これも同様の記号で ρ と書くことにする．χ を H の表現とした時，主系列表現 $\mathrm{Ind}_B^G\chi$ は

$$\mathrm{Ind}_B^G\chi=\{f\in C^\infty(G)\mid f(ghn)=(\chi\rho)(h)^{-1}f(g)\ (g\in G,\ h\in H,\ n\in N)\}_{K\ \text{有限}}$$

により定義される．ただし，K は G の極大コンパクト部分群（またはコンパクト実系）である．

§2 と同様に，一般の場合も MA の既約表現は $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*\oplus\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ の元でパラメータ付けられる．$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{m}$ はともに $\mathfrak{h}$ の実系であり，従って $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{h}$ と同一視される．このとき，$(\sigma,\nu)\in\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*\oplus\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*=\mathfrak{h}^*\oplus\mathfrak{h}^*$ に対し, $\lambda=(\nu+\sigma)/2$, $\mu=(\nu-\sigma)/2$ とおき, 以下主系列表現のパラメータとしては (μ,λ) を用いる．つまり, $\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*$ に対し, $(\lambda-\mu,\lambda+\mu)\in\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^*\oplus\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ から誘導される主系列表現を $L(\mu,\lambda)$ と書く．このとき，$\lambda-\mu$ は M の表現の微分であるため，integral でなければならない．

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Weyl 群は $W\times W$ と同型となる．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分代数は $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ であり，従ってここに $W\times W$ が作用するが，これは上記 (μ,λ) のパラメータで見たとき，$(v,w)(\mu,\lambda)=(v\mu,w\lambda)$ となる．また，G の小 Weyl 群は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Weyl 群の部分群となるが，それは $\{(v,v)\mid v\in W\}\subset W\times W$ で与えられる．

以下，簡単のため λ, μ は integral であると仮定する．ただし，以下の議論は適当な修正を行うことで一般にも通用する．

§4　準同型の存在判定法

[Abe] では，$\mathrm{Hom}_G(L(\mu_1, \lambda_1), L(\mu_2, \lambda_2)) \neq 0$ となるための必要十分条件が与えられている．その主定理を述べる．まず，$\mu_1 \in W\mu_2$，$\lambda_1 \in W\lambda_2$ であるとしてよい．（そうでなければ $L(\mu_1, \lambda_1)$ と $L(\mu_2, \lambda_2)$ の無限小指標が一致せず，従って準同型は 0 しかない．）よって以下 dominant な λ を固定し，$\lambda_1 = w_1\lambda$，$\lambda_2 = w_2\lambda$ と $w_1, w_2 \in W$ をとる．

定理を述べるために，単純 root の列 $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ と $\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対し，

$$A_{(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_l})}(\mu) \\ = \left\{ \mu' \in \mathfrak{h}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq l \text{ が存在し，} \mu' = s_{\beta_{i_r}} \cdots s_{\beta_{i_1}} \mu \text{ かつ} \\ \text{全ての } k = 1, \ldots, r \text{ に対し } \langle \check{\beta}_{i_k}, s_{\beta_{i_{k-1}}} \cdots s_{\beta_{i_1}} \mu \rangle \in \mathbb{Z}_{<0} \end{array} \right\}$$

とおく．ただし，$i = 1, \ldots, l$ に対し $\beta_i = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i)$ である．このとき，次が成り立つ．

補題 4.1　$w = s_1 \cdots s_l$ を $w \in W$ の最短表示とすると，$A_{(s_1, \ldots, s_l)}(\mu)$ は最短表示の取り方によらない．

最短表示 $w = s_1 \cdots s_l$ に対し，$A_w(\mu) = A_{(s_1, \ldots, s_l)}(\mu)$ とおく．以上の準備のもとで，準同型の存在の必要十分条件は次のように与えられる．$w_0 \in W$ を最長元とし，$W_\lambda = \{w \in W \mid w\lambda = \lambda\}$ とおく．

定理 4.2　$w_1^{-1} A_{w_1}(\mu_1) \cap W_\lambda w_2^{-1} w_0 A_{w_0 w_2}(w_0 \mu_2) \neq \emptyset$ ならば，またその時に限り $\mathrm{Hom}(L(\mu_1, w_1\lambda), L(\mu_2, w_2\lambda)) \neq 0$.

§2 における $SL(2, \mathbb{C})$ の場合がきちんと再現されることをみておこう．$\lambda = (\nu + \sigma)/2$，$\mu = (\nu - \sigma)/2$ とおくと，$\lambda > 0$ である．集合 A は次のようになる．s を $SL(2, \mathbb{C})$ の Weyl 群の単位元でない元とする．

	(σ, ν)	(ν, σ)	$(-\nu, -\sigma)$	$(-\sigma, -\nu)$
$(\mu_?, w_?\lambda)$	(μ, λ)	$(-\mu, \lambda)$	$(\mu, s\lambda)$	$(-\mu, s\lambda)$
${w_1}^{-1} A_{w_1}(\mu_1)$	$\{\mu\}$	$\{-\mu\}$	$\{-\mu\}$	$\{\mu, -\mu\}$
$w_2^{-1} w_0 A_{w_0 w_2}(w_0 \mu_2)$	$\{\mu, -\mu\}$	$\{-\mu\}$	$\{-\mu\}$	$\{\mu\}$

よって，先ほどの表に集合 A を書き加えると次のようになる．

	$w_1{}^{-1}A_{w_1}(\mu_1)$	$\{\mu\}$	$\{-\mu\}$	$\{-\mu\}$	$\{\mu,-\mu\}$
$w_2^{-1}w_0A_{w_0w_2}(w_0\mu_2)$		(σ,ν)	(ν,σ)	$(-\nu,-\sigma)$	$(-\sigma,-\nu)$
$\{\mu,-\mu\}$	(σ,ν)	1	1	1	1
$\{-\mu\}$	(ν,σ)	0	1	1	1
$\{-\mu\}$	$(-\nu,-\sigma)$	0	1	1	1
$\{\mu\}$	$(-\sigma,-\nu)$	1	0	0	1

この表から，この場合に定理が成り立つことが見て取れる．

§5　特殊な場合における準同型の分類

一般に G の二つの主系列表現が与えられた時，その間の準同型全てを分類することは難しい問題であり，現在殆ど解決されていない．ただし，パラメータが適当な条件を満たしている時には，状況は非常に簡単になる．ここではそれについて述べる．

前節と同様に，$\mathrm{Hom}(L(\mu_1,w_1\lambda),L(\mu_2,w_2\lambda))$ を考える．このとき，次が成り立つ．

命題 5.1

$$\mathrm{Hom}(L(\mu_1,\lambda),L(\mu_2,w_0\lambda))=\begin{cases}\mathbb{C} & (\mu_1\in W_\lambda w_0\mu_2),\\ 0 & (\mu_1\notin W_\lambda w_0\mu_2).\end{cases}$$

つまり，$w_1=e$（単位元），$w_2=w_0$ の時は状況は非常に単純である．もちろん，この命題は定理 4.2 の特殊な場合を導く．

証明は，λ が正則ならば Bernstein-Gelfand の圏同値 [BG80] を用いて圏 $\mathcal{O}$ の問題に帰着させる．この圏同値のもとで，$L(\mu_1,\lambda)$ は Verma 加群に，$L(\mu_2,w_0\lambda)$ は Verma 加群の双対に対応し，この場合はよく知られている．（例えば，Humphreys の本 [Hum08, 3.3 Thorem (c)]．）一般の場合は translation principle を使えばよい．

後で必要になるので，更に高次の Ext 群についても述べておこう．この場合，1 次以上の Ext 群は全て消滅する．

命題 5.2　$k\geq 1$ に対し，

$$\mathrm{Ext}^k(L(\mu_1,\lambda),L(\mu_2,w_0\lambda))=0.$$

証明は同様である．つまり，λ が正則な場合は圏 $\mathcal{O}$ の問題に帰着させ [Hum08, 6.12. Theorem]，一般の場合は translation principle を使えばよい．

§6　Duflo-Zelobenko の 4 項完全系列と定理 4.2 の証明の概要

一般の実半単純 Lie 群の場合と比べて，複素半単純 Lie 群の場合は様々な特殊な事実が成立するが，その一つがここで述べる Duflo-Zelobenko の 4 項完全系列 [Duf75] である．

$\overline{N}$ を Δ^- に対応する Borel 部分群の unipotent radical とし，$w \in W$ とする．$f \in L(\mu, \lambda)$ に対し，

$$(T_w^{(\mu,\lambda)} f)(g) = \int_{w\overline{N}w^{-1} \cap N} f(gnw)dn$$

とおくと，この積分は一般には収束しないが，もし収束すれば $L(w\mu, w\lambda)$ の元を与える．その形から，$T_w^{(\mu,\lambda)}$ は G の作用と可換であるから，$T_w^{(\mu,\lambda)}$ は（収束すれば）絡作用素 $L(\mu,\lambda) \to L(w\mu, w\lambda)$ を与える（いわゆる Kunz-Stein の intertwining operator）．$\alpha \in \Delta$ に対し，$\check{\alpha}$ を coroot とすれば，よく知られている通り

$$\text{すべての } \alpha \in w\Delta^- \cap \Delta^+ \text{ に対し，} \mathrm{Re}\langle \lambda + \mu, \check{\alpha} \rangle > 0$$

を満たすときに積分は収束し，$\lambda - \mu$ を固定すると $\lambda + \mu$ に関して正則となり，更にこの変数に関し $\mathfrak{h}^*$ 上に有理的に解析接続される．

α を単純 root とし，$w = s_\alpha$ が α に関する鏡映変換であるとしよう．更に，$\langle \mu, \check{\alpha} \rangle > 0$ とする．このとき，$T_{s_\alpha}^{(\mu,\lambda)}$ は極を持たず，絡作用素 $L(\mu,\lambda) \to L(s_\alpha\mu, s_\alpha\lambda)$ が定義される．この核と余核を記述するのが次の定理である．

定理 6.1 ([Duf75])　$\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle > 0$ とする．

(1) $\langle \mu, \check{\alpha} \rangle \leq 0$ ならば，$T_{s_\alpha}^{(\mu,\lambda)}$ は同型 $L(\mu,\lambda) \simeq L(s_\alpha\mu, s_\alpha\lambda)$ を与える．

(2) $\langle \mu, \check{\alpha} \rangle > 0$ ならば，完全系列

$$0 \to L(\mu, s_\alpha\lambda) \to L(\mu,\lambda) \xrightarrow{T_{s_\alpha}^{(\mu,\lambda)}} L(s_\alpha\mu, s_\alpha\lambda) \to L(\mu, s_\alpha\lambda) \to 0$$

が存在する．

(1) の逆写像は $T_{s_\alpha}^{(s_\alpha\mu, s_\alpha\lambda)}$ で与えられる．（λ に関する条件から $T_{s_\alpha}^{(s_\alpha\mu, s_\alpha\lambda)}$ はこの点で極を持たない．）(2) における完全系列は Duflo-Zelobenko の 4 項完全系列と呼ばれる．

例えば，$SL(2,\mathbb{C})$ の場合には次のようになる．(σ,ν) を §2 のようにとっておこう．この時，条件 $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle > 0$ を満たすのは (σ,ν) と (ν,σ) であり，(1) の条件は (ν,σ) が，(2) の条件は (σ,ν) が満たす．従って，定理 (1) は $(\nu,\sigma) \simeq (-\nu,-\sigma)$ が成り立つことを，ま

た (2) は完全系列

$$0 \to (-\nu, -\sigma) \to (\sigma, \nu) \to (-\sigma, -\nu) \to (-\nu, -\sigma) \to 0$$

が存在することを主張する．この事実が $SL(2, \mathbb{C})$ の場合に成り立っていることは，§2 に記した各表現の具体的な構造から確認できる．

定理 6.1 は，準同型 $T_{s_\alpha}^{(\mu,\lambda)}$ により $L(\mu, \lambda)$ と $L(s_\alpha\mu, s_\alpha\lambda)$ を比較した際の「差」を記述する定理であると思うことができる．従って，$L(\mu, \lambda)$ の情報から $L(s_\alpha\mu, s_\alpha\lambda)$ の情報を引き出すことができる．実際にそれを実行するのは容易なことではないが，定理 4.2 の証明はそのような形で行われる．

定理 4.2 の証明の概要を述べよう．まずは, $w_1 = e$, つまり $\mathrm{Hom}(L(\mu_1, \lambda), L(\mu_2, w_2\lambda))$ を考える．もし $w_2 = w_0$ ならば，これは命題 5.1 に他ならない．一般の場合を考えるために，w_2 の長さに関する上からの帰納法を使おう．$s_\alpha w_2 > w_2$ と単純 root α をとる．すると定理 6.1 から，次のどちらかが成り立つ．

(1) $L(\mu_2, w_2\lambda) \simeq L(s_\alpha\mu_2, s_\alpha w_2\lambda)$.

(2) $0 \to L(\mu_2, s_\alpha w_2\lambda) \to L(\mu_2, w_2\lambda) \to L(s_\alpha\mu_2, s_\alpha w_2\lambda) \to L(\mu_2, s_\alpha w_2\lambda) \to 0.$

帰納法の仮定から，$\mathrm{Hom}(L(\mu_1, \lambda), L(\mu_2, s_\alpha w_2\lambda))$ や $\mathrm{Hom}(L(\mu_1, \lambda), L(s_\alpha\mu_2, s_\alpha w_2\lambda))$ がいつ 0 でないかはわかっている．従って，(1) または (2) を用いることで，$\mathrm{Hom}(L(\mu_1, \lambda), L(\mu_2, w_2\lambda))$ に関しても情報を引き出したい．

(1) の場合は問題がない．問題となるのは (2) である．単純に完全系列の存在のみからは, 帰納法を進めることができない．ここで重要なのは, 次の性質が成り立つことである．

> $\mathrm{Hom}(L(\mu_1, \lambda), L(\mu_2, w_2\lambda)) = 0$ ならば，$\mathrm{Ext}^k(L(\mu_1, \lambda), L(\mu_2, w_2\lambda)) = 0$ が全ての $k \geq 0$ に対し成り立つ．

この主張を直接示すことはできないが，簡単なホモロジー代数により定理の主張とこの性質を帰納法により同時に示すことができる．（帰納法の最初のステップで正しいことは，命題 5.2 が保証してくれる．）

一般の w_1 の場合も，w_1 の長さに関する帰納法を用いることで，同様の証明が通用する．

参考文献

[Abe] N. Abe, *On the existence of homomorphisms between principal series of complex semisimple Lie groups*, preprint.

[BG80] J. N. Bernstein and S. I. Gel′fand, *Tensor products of finite- and infinite-dimensional representations of semisimple Lie algebras*, Compositio Math. **41** (1980), no. 2, 245–285.

[Duf75] M. Duflo, *Représentations irréductibles des groupes semi-simples complexes*, Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sém., Nancy-Strasbourg, 1973–75), Springer, Berlin, 1975, pp. 26–88. Lecture Notes in Math., Vol. 497.

[Hum08] J. E. Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathscr{O}$*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 94, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Str03] C. Stroppel, *Homomorphisms and extensions of principal series representations*, J. Lie Theory **13** (2003), no. 1, 193–212.